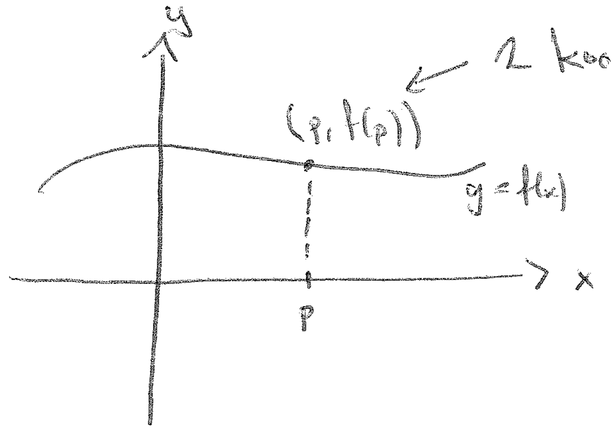
Föreläsning 6

Funktioner i flera variabler och partiella derivator

Vi ska nu betrakta funktioner som är definierad på områden i $\mathbb{R}^n$ och lära oss att derivera dessa funktioner.

Vad är $\mathbb{R}^n$? Jo, $\mathbb{R}^n$ består av n-tuplar av reella tal $(x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathbb{R}^2$ är ni vana vid, eftersom det är i $\mathbb{R}^2$ som ni ritar grafer av funktioner i en variabel.



$\mathbb{R}^3$ är rummet, dvs vi har tre variabler.

I rummet så ser vi dessa som bredd, höjd och djup. (x, y, och z.)

$\mathbb{R}^3$ ska inte alltid ses som rummet, utan när vi har tre variabler så kommer vi jobba i $\mathbb{R}^3$.

Exempel på hur funktioner i flera variabler ser ut:

$$f(x,y,z) = x+y+z$$

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

$$f(x,y,z) = xyz$$

$$f(x,y,z) = x^3y + \frac{x}{y} + z^2x$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^3x_4 + x_1x_2 + x_1x_2x_3x_4.$$

Idén när man deriverar en funktion i flera variabler är att man måste specificera vilken variabel man deriverar m.a.p, och betraktar resterande varabel som konstanter.

__Anm.__

Rita funktioner i flera varabler kan ibland vara väldigt svårt. Detta ingår __inte__ i denna kurs.

För att göra en formell framställning av derivator av funktioner i flera variabler skulle kräva ett maskineri av gränsvärden och topologiska begrepp som områden och omgivningar. Detta kräver väldigt mycket extra jobb, så vi kommer ha ett informellt tillvägagångssätt med många exempel istället.

Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en funktion; säg att f beror på variablerna x, y och z. Derivatan m.a.p x, y respektive z skrivs som $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f$ resp. $\frac{\partial}{\partial z} f$. Man skriver även f_x, f_y och f_z, alternativt f_1, f_2 och f_3. Ett annat sätt är $D_x f$, $D_y f$ och $D_z f$. Definitionerna av respektive derivata, som kallas partiella derivator, är

$$f_1(x,y,z) = f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$f_2(x,y,z) = f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h}$$

och

$$f_3(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h}.$$

Definitionen säger att man **kan** derivera en variabel och hålla de andra konstanta.

Ex:

Betrakta $f(x,y) = x^2 + y^2$. Som vi har sagt tidigare så deriverar vi en variabel i sänder:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Låt oss göra detta med hjälp av definitionen också:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + y^2 - x^2 - y^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = 2x.$$

P.S.S med $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ex:

Betrakta $f(x,y) = x\sin y + \cos(xy)$. Hitta $\frac{\partial}{\partial x} f$ och $\frac{\partial}{\partial y} f$. Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin y - y\sin(xy)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y - x\sin(xy).$$

Utvärdera i $(1,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \sin 0 - 0\sin(1\cdot 0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 1\cdot\cos 0 - 1\sin 0 = \underline{1}.$$

Ex:

Betrakta $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \dfrac{x_1^2 \sin(x_3)}{x_2 + x_4^3}$.

Hitta $f_1, \dots, f_4$!

Vi har att

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{2x_1 \sin(x_3)}{x_2 + x_4^3}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{x_1^2 \sin(x_3)}{(x_2 + x_4^3)^2}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{x_1^2 \cos(x_3)}{x_2 + x_4^3}$$

$$f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{3x_4^2\, x_1^2 \sin(x_3)}{(x_2 + x_4^3)^2}.$$

Ex:

Betrakta
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Existerar $f_1(0,0)$ och/eller $f_2(0,0)$.

Vi börja med $f_1(0,0)$: Vi har enligt definition

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^3 \sin\frac{1}{h^2} = \lim_{h\to 0} h \frac{\sin \frac{1}{h^2}}{1/h^2}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u} \frac{\sin u^2}{u^2} = 0.$$

$u = \frac{1}{h}$ $u \to \infty$ då $h \to 0$.

Vidare så är

$$f_2(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0$$

~~[illegible]~~ enligt samma argument som ovan.

Låt oss gå tillbaka till 1 variabel igen och egenskaper för derivatan. Vi börjar med en definition.

Def.

Antag att I är ett intervall och att $f: I \to \mathbb{R}$ är en funktion. Låt $x_1, x_2 \in I$.

1) Om $f(x_2) > f(x_1)$ då $x_2 > x_1$ så säger vi att f växer på I.

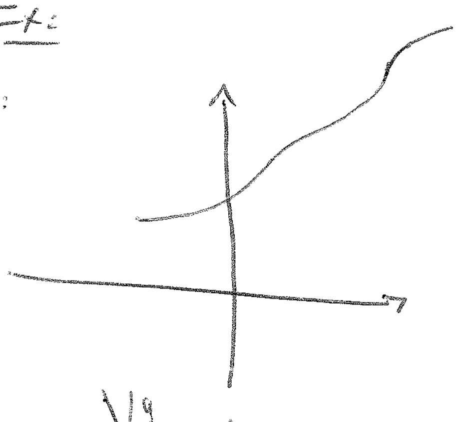
2) Om $f(x_2) < f(x_1)$ då $x_2 < x_1$ så säger vi att f avtar på I.

3) Om $f(x_2) \geq f(x_1)$ då $x_2 \geq x_1$ så säger vi att f är icke-avtagande på I.

4) Om $f(x_2) \leq f(x_1)$ då $x_2 \leq x_1$ så säger vi att f är icke-växande på I.

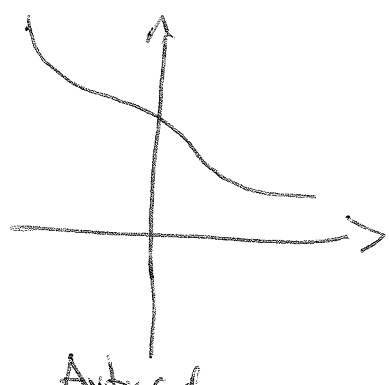
Ex:

(1):



Växande

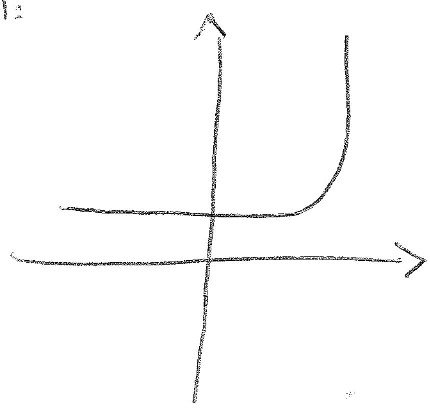
(2):



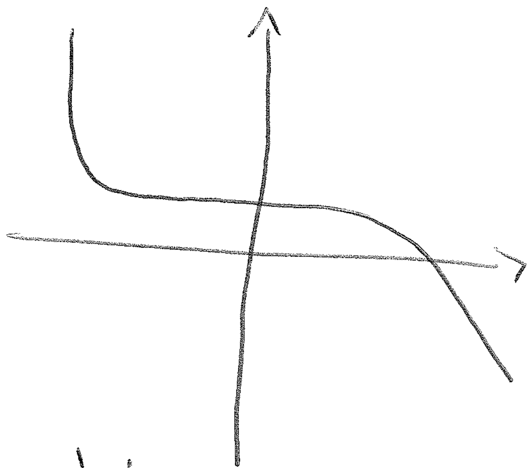
Avtagande

Ex:

(3):



Ickeavtagande



Ickeväxande.

En av huvudpunkterna är följande.

Medelvärdessatsen:

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b). Då finns det ett $c\in(a,b)$ så att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Anm:

Satsen säger inte hur man hittar ett sådant c, bara att det finns!

Bevis:

Vi börjar med att visa specialfallet då $f(a)=f(b)$, varvid vi måste visa att

$$f'(c)=0.$$

Om $f(x)=f(a)$ $\forall x\in[a,b]$, så är f konstant varvid $f'(c)=0$ $\forall c\in(a,b)$.

Antag nu att $f(x)\neq f(a)$ för något $x\in(a,b)$. Två saker kan hända

1) $f(x) > f(a)$

2) $f(x) < f(a)$.

Antag $f(x)>f(a)$. Eftersom f är kontinuerlig på $[a,b]$ så antar f ett maximum i något $c\in[a,b]$, dvs

$$f(c)\geq f(x) > f(a) = f(b).$$

Detta ger att $c\neq a$ och $c\neq b$, dvs $c\in(a,b)$, så enligt antagande så är f deriverbar i c.

Påst: $f'(c)=0$.

Eftersom $f(c)$ är ett maximum så är

$$f(x)-f(c)\leq 0 \quad \forall x\in(a,b).$$

Om $c<x<b$ då är

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0, \text{ så } f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$

Om $a<x<c$ så är

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0. \text{ så } f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0.$$

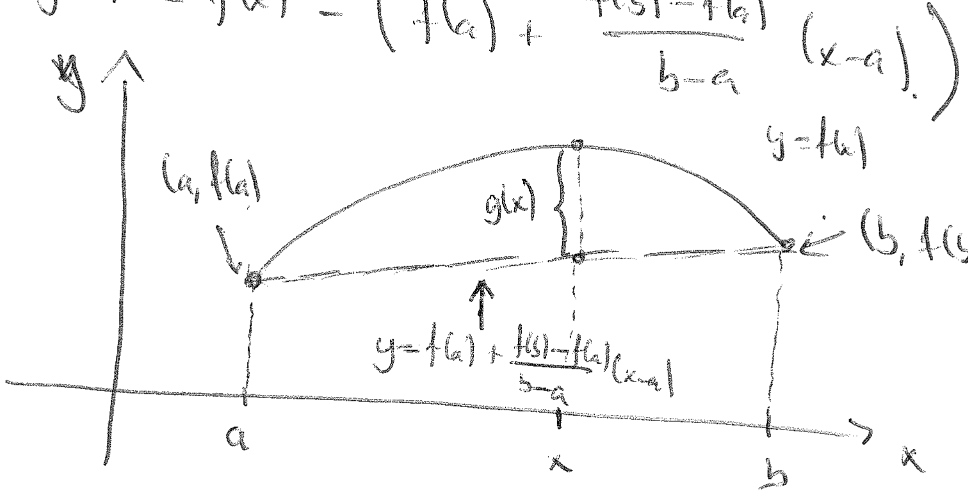
Alltså är $f'(c)\leq 0$ och $f'(c)\geq 0 \Rightarrow f'(c)=0$.

Alltså har vi visat satsen för $f(a)=f(b)$.

(2) Liknande bevis.

Antag nu att $f(a)\neq f(b)$. Sätt

$$g(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$$



Observera att g är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b). Vidare så är

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

och

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0.$$

$\therefore$ $g(a) = g(b) = 0$, så enligt det vi visade i början så finns det ett $c \in (a,b)$ så att $g'(c) = 0$. Men

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

så

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\iff$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$

Med hjälp av medelvärdessatsen och derivatan kan man avgöra om en funktion växer eller avtar:

Sats:

Låt J vara ett öppet intervall och låt I vara ett intervall som innehåller I plus ett eller båda ändpunkterna i J. Antag att $f: I \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och deriverbar på J. Då

1/ Om $f'(x) > 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ växer på I

2/ Om $f'(x) < 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ avtar på I

3/ Om $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ är ickeavtagande på I

4/ Om $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ är ickeväxande på I.

Bevis:

Tag $x_1, x_2 \in I$ med $x_2 > x_1$. Medelvärdessatsen ger ett $c \in (x_1, x_2)$ med

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1).$$

Eftersom $x_2 > x_1$ så har $f(x_2) - f(x_1)$ samma tecken som $f'(c)$, eller så är $f(x_2) - f(x_1) = 0$ om $f'(c) = 0$. Nu följer (1)-(4) från definitionen. □

Ex:

Visa att $\sin x < x \quad \forall x \in (0, \infty)$.

Bevis:

Betrakta $f(x) = \sin x - x$. Vill se att $f(x) < 0 \quad \forall x$.
Vi har att

$$f'(x) = \cos x - 1$$

Eftersom $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0$.
Detta betyder att $f(x)$ är icke växande.
Vidare eftersom $f(0) = 0$, så är $f(x) < 0 \quad \forall x$,
dvs $\sin x - x < 0 \Leftrightarrow \sin x < x$.

$\square$.